Propositions mathématiques : implication et équivalence

1. Implication entre propositions mathématiques

Définition (rappel) : Une **proposition mathématique** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Revoir si besoin le :

- *cours sur les propositions mathématiques*
- *quizz sur les propositions mathématiques*

Définition : On considère deux propositions P et Q.

On dit que **P implique Q** dans le cas où, si Pest vraie, alors Q l'est aussi. On note dans ce cas **P $\Rightarrow$ Q** .

Remarques :

- On peut traduire l'implication P $\Rightarrow$ Q par une phrase de la forme « Si P est vraie, alors Q est vraie. ».
- On dit alors que **P est une condition suffisante pour Q**. Il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie.
- On dit aussi que **Q est une condition nécessaire pour P**. Il est nécessaire que Q soit vraie pour que P soit vraie.
- On peut dire également que **Q est une conséquence de P**. Le fait que P soit vraie entraîne que Q soit aussi vraie.

Exemples :

- Soient les propositions P : « ABC est un triangle équilatéral » et Q : « ABC est un triangle isocèle en A ».
  On a bien P $\Rightarrow$ Q car ABC équilatéral signifie que AB = AC = BC. Et AB = AC signifie qu'ABC est isocèle en A.
- On considère un réel x. On note P(x) la proposition « $x > 0$ » et Q(x) la proposition « $x > -1$ ».
  On a bien P(x) $\Rightarrow$ Q(x). En effet, tout nombre strictement positif est aussi strictement supérieur à - 1.

Remarque : pour vérifier une implication entre propositions dépendant d'une variable, on peut s'aider en traduisant l'implication par une phrase du type :

« **si** <proposition 1> **est vraie alors forcément et dans tous les cas** <proposition 2> **est vraie** ».

Par exemple, « $x^2 = 4$ » $\Rightarrow$ « $x = 2$ » n'est pas une implication correcte car on ne peut pas dire que si $x^2 = 4$ alors forcément et dans tous les cas $x = 2$. En effet, on pourrait avoir $x = -2$!

2. Réciproque

Définition : On considère deux propositions P et Q.

L'implication Q $\Rightarrow$ P est la **réciproque de P $\Rightarrow$ Q**. On la note dans ce cas **P $\Leftarrow$ Q** , et on lit « P est impliquée par Q ».

Exemple :

Soit n un entier naturel. La réciproque de la proposition « Si n est premier, alors n est impair. » est « Si n est impair, alors n est premier. ».

3. Equivalence entre deux propositions

Définition : On dit que deux propositions **P et Q sont équivalentes** si P implique Q et Q implique P.
On dit également que P est vraie **si et seulement si** Q est vraie, et on note dans ce cas **$P \Leftrightarrow Q$**.

Remarques : Autrement dit :

- Si $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q$, alors $P \Leftrightarrow Q$. Le symbole équivalent $\Leftrightarrow$ est donc la **contraction** des symboles $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$.
- $P \Leftrightarrow Q$ signifie que les propositions P et Q sont **soit** toutes les deux vraies, **soit** toutes les deux fausses.

Exemples : Soit x un réel.

- « $2x - 4 = 0$ » est équivalent à « $x = 2$ ». En effet :
  - Si $2x - 4 = 0$, alors $2x = 4$ et donc $x = 2$. Autrement dit, « $2x - 4 = 0$ » $\Rightarrow$ « $x = 2$ ».
  - Et réciproquement, si $x = 2$, alors $2x - 4 = 0$. Autrement dit, « $2x - 4 = 0$ » $\Leftarrow$ « $x = 2$ ».
- En revanche, « $x = 2$ » n'est pas équivalent à « $x^2 = 4$ ». En effet :
  - Les deux propositions ne sont pas soit simultanément vraies, soit simultanément fausses car pour $x = -2$, la proposition « $x^2 = 4$ » est vraie alors que la proposition « $x = 2$ » est fausse.
  - Autre façon de le justifier : L'implication « $x = 2$ » $\Rightarrow$ « $x^2 = 4$ » est vraie (car si $x = 2$ alors $x^2 = 4$) alors que la réciproque « $x = 2$ » $\Leftarrow$ « $x^2 = 4$ » est fausse (contre-exemple : $x = -2$).

4. A toi de jouer !

Vérifie que tu as bien compris ces notions de logique avec ce petit quizz ...

C'est parti !